Vektörel Analiz Arasınav 16.07.2018

1) Doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

2) Düzlemin vektörel, parametrik ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

3) $A(-1,3,-2)$ noktasından geçen ve $\vec{B}=2i+j+k$, $\vec{C}=j-k$ vektörlerine dik olan doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.

4) $A(0,1,1)$, $B(1,0,1)$, $C(1,1,0)$ noktalarından geçen düzlemin vektörel, parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.

5) $A(0,1,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(1,0,1)$ noktaları bir üçgenin köşe noktaları olduğuna göre bu üçgenin alanını bulunuz.

6) $A(0,1,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(1,0,1)$, $D(1,1,0)$ olmak üzere $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlü cismin hacmini bulunuz.

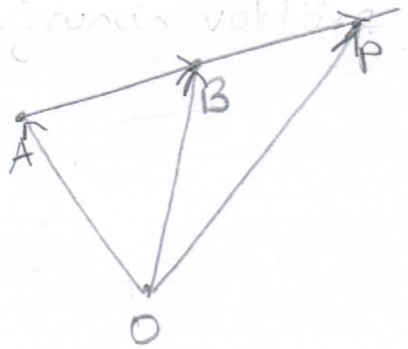
7) Düzlemde (iki boyutlu uzayda) dairesel ~~doğrusal~~ hareket eden bir cismin hızının $V(t)=r\,w(t)$ olduğunu gösteriniz. r dairenin yarıçapı, $w(t)=\dfrac{d\theta(t)}{dt}$ açısal hız dır.

Not: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız. Başarılar.
Süre 90 dk dır.

N.A.

Vektörel Analiz Arasınav Cevap Anahtarı 16.07.18

1)



İki noktadan bir tek doğru geçer. İki nokta A ve B olsun. P ise bu iki noktadan geçen doğrunun üzerinde olacak olan herhangi bir nokta olmak üzere P nin geometrik yeri doğruyu oluşturacaktır. Şekle göre $\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{AB}$ olur. Burada $\lambda \in \mathbb{R}$ dir. Bu doğrunun vektörel denklemidir. Noktalar ister iki, ister üç, ister dört ve daha yukarı boyutlu uzayda olabilir. Biz $A(a_1, a_2, a_3)$ $B(b_1, b_2, b_3)$ şeklinde üç boyutta alacak olursak, $P(x, y, z)$ olmak üzere doğrunun vektörel denkleminden $\vec{OP} = (x-0, y-0, z-0) = (x, y, z)$ $\vec{OA} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ olmak üzere

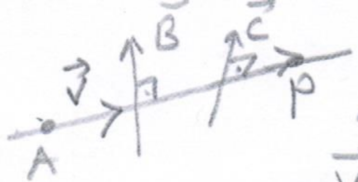
$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \Rightarrow$$

$$x = a_1 + \lambda (b_1 - a_1), \quad y = a_2 + \lambda (b_2 - a_2), \quad z = a_3 + \lambda (b_3 - a_3)$$

şeklinde parametrik denk elde edilir. Buradan ise

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \lambda, \quad \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \lambda, \quad \frac{z - a_3}{b_3 - a_3} = \lambda \text{ dan } \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3}$$

şeklinde kartezyen denklemi elde edilmiş olur

3) 

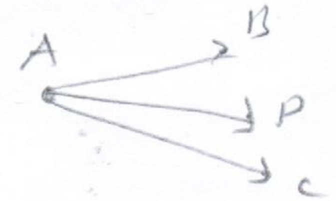
A nok geçen doğru doğrultman vektörü $\vec{V}$ alınırsa $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ doğruya dik olduğundan $\langle \vec{V}, \vec{B} \rangle = 0$, $\langle \vec{V}, \vec{C} \rangle = 0$ olur. Buradan $\vec{V} = \vec{B} \times \vec{C}$ olur. Doğru üzerinde bir temsili P noktası alırsak $\vec{AP}$, $\vec{V}$ doğrultman vektörünün belli bir katı olur. Yani $\vec{AP} = \lambda \vec{V}$ olur ki bu doğrunun vektörel denklemi olur. Buradan $P(x, y, z)$

$A(-1, 3, -2)$ $\vec{B} = (2, 1, 1)$ $\vec{C} = (0, 1, -1)$,

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 2, 2) = \vec{V}$$ ol. üzere

$(x+1, y-3, z+2) = \lambda(-2, 2, 2) \Rightarrow x = -1 - 2\lambda$, $y = 3 + 2\lambda$, $z = -2 + 2\lambda$ parametrik denk bulunur. Karteryen denklemi ise

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{2}$$ olur

4) 

Düzlemin vek. denk.
$\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AP}) = 0$ veya $\vec{AP} = u\vec{AB} + v\vec{AC}$
veya $\langle AB \times AC, AP \rangle = 0$ dir.

$A(0,1,1)$, $B(1,0,1)$, $C(1,1,0)$ old. dan

$\vec{AB} = (1, -1, 0)$ $\vec{AC} = (1, 0, -1)$, $\vec{AP} = (x-0, y-1, z-1)$ olur.

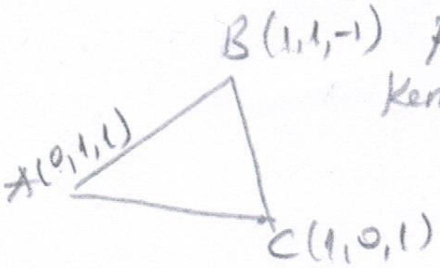
Parametrik denk: $\vec{AP} = u\vec{AB} + v\vec{AC}$ den. u ve v parametre

$(x, y-1, z-1) = u(1, -1, 0) + v(1, 0, -1) \Rightarrow \underline{x = u + v}$, $\underline{y - 1 = -u}$

$\underline{z - 1 = -v}$ olur. Buradan u ve v yi yok ederek

$x = 1 - y + 1 - z \Rightarrow \underline{x + y + z + 2 = 0}$ karteryen denk bulunur

5)



Paralel Kenarın Alan $= \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$ dir.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} = (1,0,-2)$ $\quad \overrightarrow{AC} = (1,-1,0)$ $\quad = (-2,-2,-1)$

Alan $= \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{9} = 3\,br^2$ Üçgenin alanı $= \frac{3}{2}\,br^2$

6) $A(0,1,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(1,0,1)$, $D(1,1,0)$

$\overrightarrow{AB} = (1,0,-2)$ $\overrightarrow{AC} = (1,-1,0)$, $\overrightarrow{AD}(1,0,-1)$ vek.

üzerine kurulan paralel yüzlü cismin hacmi

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(-1+2) = -1$$

hacim negatif olmayacağı için

$V = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = |-1| = 1$ olur.

7) Çözümü notlarda aynısı var.

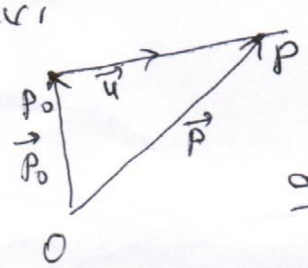
Vektörel Analiz Ödevi

1) $\vec{F}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ ifadesinin

a) Doğru b) Çember c) parabol d) Elips e) Hiperbol

belirtmesi için $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ nasıl olmalıdır? Belirleyiniz.

2) $f(x,y,z)$ skalar alan fonksiyonunun $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasında $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ yönündeki $(\|\vec{u}\| = 1)$ türevi



$\vec{P} = \vec{P_0} + s\vec{u}$ ve $\|\vec{u}\| = 1$ olduğundan

$\|\vec{P} - \vec{P_0}\| = s$ olmak üzere

$$\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{P=P_0} = \lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\|P - P_0\|} = \lim_{s \to 0} \frac{f(P_0 + su) - f(P_0)}{s}$$

$$= \left.\frac{df(P_0 + su)}{ds}\right|_{s=0}$$ dır. Buna göre

$$\left.\frac{df(P_0 + su)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)\right|_{P=P_0}$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Teslim Tarihi

26.07.2018